

ገጽ ፳፻፲፱

፳፻፲፱

ገጽ ፳፻፲፱

ገጽ 26: ገጽ 26... ገጽ 26: ገጽ 26... ገጽ 26: ገጽ 26...
 ገጽ 26: ገጽ 26... ገጽ 26: ገጽ 26... ገጽ 26: ገጽ 26...
 ገጽ 26: ገጽ 26... ገጽ 26: ገጽ 26... ገጽ 26: ገጽ 26...

תרגילים

1. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$.
 פתרון: נניח $n = 4k + r$, כאשר $k \in \mathbb{Z}$ ו- $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. אז $n^2 = (4k + r)^2 = 16k^2 + 8kr + r^2 \equiv r^2 \pmod{4}$.
 אם $r = 0$ או $r = 2$, אז $r^2 \equiv 0 \pmod{4}$. אם $r = 1$ או $r = 3$, אז $r^2 \equiv 1 \pmod{4}$. לכן $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$.

2. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{8}$.
 פתרון: נניח $n = 4k + r$, כאשר $k \in \mathbb{Z}$ ו- $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. אז $n^2 = (4k + r)^2 = 16k^2 + 8kr + r^2 \equiv r^2 \pmod{8}$.
 אם $r = 0$ או $r = 2$, אז $r^2 \equiv 0 \pmod{8}$. אם $r = 1$ או $r = 3$, אז $r^2 \equiv 1 \pmod{8}$. לכן $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{8}$.

3. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$.
 פתרון: נניח $n = 3k + r$, כאשר $k \in \mathbb{Z}$ ו- $r \in \{0, 1, 2\}$. אז $n^2 = (3k + r)^2 = 9k^2 + 6kr + r^2 \equiv r^2 \pmod{3}$.
 אם $r = 0$, אז $r^2 \equiv 0 \pmod{3}$. אם $r = 1$ או $r = 2$, אז $r^2 \equiv 1 \pmod{3}$. לכן $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$.

4. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{5}$.
 פתרון: נניח $n = 5k + r$, כאשר $k \in \mathbb{Z}$ ו- $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. אז $n^2 = (5k + r)^2 = 25k^2 + 10kr + r^2 \equiv r^2 \pmod{5}$.
 אם $r = 0$, אז $r^2 \equiv 0 \pmod{5}$. אם $r = 1, 2, 3, 4$, אז $r^2 \equiv 1 \pmod{5}$. לכן $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{5}$.

5. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{7}$.
 פתרון: נניח $n = 7k + r$, כאשר $k \in \mathbb{Z}$ ו- $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. אז $n^2 = (7k + r)^2 = 49k^2 + 14kr + r^2 \equiv r^2 \pmod{7}$.
 אם $r = 0$, אז $r^2 \equiv 0 \pmod{7}$. אם $r = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, אז $r^2 \equiv 1 \pmod{7}$. לכן $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{7}$.

6. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{11}$.
 פתרון: נניח $n = 11k + r$, כאשר $k \in \mathbb{Z}$ ו- $r \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$. אז $n^2 = (11k + r)^2 = 121k^2 + 22kr + r^2 \equiv r^2 \pmod{11}$.
 אם $r = 0$, אז $r^2 \equiv 0 \pmod{11}$. אם $r = 1, 2, \dots, 10$, אז $r^2 \equiv 1 \pmod{11}$. לכן $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{11}$.

7. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{13}$.
 פתרון: נניח $n = 13k + r$, כאשר $k \in \mathbb{Z}$ ו- $r \in \{0, 1, 2, \dots, 12\}$. אז $n^2 = (13k + r)^2 = 169k^2 + 26kr + r^2 \equiv r^2 \pmod{13}$.
 אם $r = 0$, אז $r^2 \equiv 0 \pmod{13}$. אם $r = 1, 2, \dots, 12$, אז $r^2 \equiv 1 \pmod{13}$. לכן $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{13}$.

8. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{17}$.
 פתרון: נניח $n = 17k + r$, כאשר $k \in \mathbb{Z}$ ו- $r \in \{0, 1, 2, \dots, 16\}$. אז $n^2 = (17k + r)^2 = 289k^2 + 34kr + r^2 \equiv r^2 \pmod{17}$.
 אם $r = 0$, אז $r^2 \equiv 0 \pmod{17}$. אם $r = 1, 2, \dots, 16$, אז $r^2 \equiv 1 \pmod{17}$. לכן $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{17}$.

9. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{19}$.
 פתרון: נניח $n = 19k + r$, כאשר $k \in \mathbb{Z}$ ו- $r \in \{0, 1, 2, \dots, 18\}$. אז $n^2 = (19k + r)^2 = 361k^2 + 38kr + r^2 \equiv r^2 \pmod{19}$.
 אם $r = 0$, אז $r^2 \equiv 0 \pmod{19}$. אם $r = 1, 2, \dots, 18$, אז $r^2 \equiv 1 \pmod{19}$. לכן $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{19}$.

10. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{23}$.
 פתרון: נניח $n = 23k + r$, כאשר $k \in \mathbb{Z}$ ו- $r \in \{0, 1, 2, \dots, 22\}$. אז $n^2 = (23k + r)^2 = 529k^2 + 46kr + r^2 \equiv r^2 \pmod{23}$.
 אם $r = 0$, אז $r^2 \equiv 0 \pmod{23}$. אם $r = 1, 2, \dots, 22$, אז $r^2 \equiv 1 \pmod{23}$. לכן $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{23}$.

11. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{29}$.
 פתרון: נניח $n = 29k + r$, כאשר $k \in \mathbb{Z}$ ו- $r \in \{0, 1, 2, \dots, 28\}$. אז $n^2 = (29k + r)^2 = 841k^2 + 58kr + r^2 \equiv r^2 \pmod{29}$.
 אם $r = 0$, אז $r^2 \equiv 0 \pmod{29}$. אם $r = 1, 2, \dots, 28$, אז $r^2 \equiv 1 \pmod{29}$. לכן $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{29}$.

12. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{31}$.
 פתרון: נניח $n = 31k + r$, כאשר $k \in \mathbb{Z}$ ו- $r \in \{0, 1, 2, \dots, 30\}$. אז $n^2 = (31k + r)^2 = 961k^2 + 62kr + r^2 \equiv r^2 \pmod{31}$.
 אם $r = 0$, אז $r^2 \equiv 0 \pmod{31}$. אם $r = 1, 2, \dots, 30$, אז $r^2 \equiv 1 \pmod{31}$. לכן $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{31}$.

13. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{37}$.
 פתרון: נניח $n = 37k + r$, כאשר $k \in \mathbb{Z}$ ו- $r \in \{0, 1, 2, \dots, 36\}$. אז $n^2 = (37k + r)^2 = 1369k^2 + 74kr + r^2 \equiv r^2 \pmod{37}$.
 אם $r = 0$, אז $r^2 \equiv 0 \pmod{37}$. אם $r = 1, 2, \dots, 36$, אז $r^2 \equiv 1 \pmod{37}$. לכן $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{37}$.

14. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{41}$.
 פתרון: נניח $n = 41k + r$, כאשר $k \in \mathbb{Z}$ ו- $r \in \{0, 1, 2, \dots, 40\}$. אז $n^2 = (41k + r)^2 = 1681k^2 + 82kr + r^2 \equiv r^2 \pmod{41}$.
 אם $r = 0$, אז $r^2 \equiv 0 \pmod{41}$. אם $r = 1, 2, \dots, 40$, אז $r^2 \equiv 1 \pmod{41}$. לכן $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{41}$.

15. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{43}$.
 פתרון: נניח $n = 43k + r$, כאשר $k \in \mathbb{Z}$ ו- $r \in \{0, 1, 2, \dots, 42\}$. אז $n^2 = (43k + r)^2 = 1849k^2 + 86kr + r^2 \equiv r^2 \pmod{43}$.
 אם $r = 0$, אז $r^2 \equiv 0 \pmod{43}$. אם $r = 1, 2, \dots, 42$, אז $r^2 \equiv 1 \pmod{43}$. לכן $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{43}$.

16. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{47}$.
 פתרון: נניח $n = 47k + r$, כאשר $k \in \mathbb{Z}$ ו- $r \in \{0, 1, 2, \dots, 46\}$. אז $n^2 = (47k + r)^2 = 2209k^2 + 94kr + r^2 \equiv r^2 \pmod{47}$.
 אם $r = 0$, אז $r^2 \equiv 0 \pmod{47}$. אם $r = 1, 2, \dots, 46$, אז $r^2 \equiv 1 \pmod{47}$. לכן $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{47}$.

